

---

# ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2025-2026

## Série 13: Orthogonalité et décomposition QR

---

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) connaître les **propriétés des matrices orthogonales** ;
- (O.2) **appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale/orthonormée** à partir d'une famille génératrice ;
- (O.3) **calculer la projection orthogonale** d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel, qui donne la **meilleure approximation** du vecteur avec des éléments du sous-espace ;
- (O.4) **calculer la décomposition QR** d'une matrice.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- matrice orthogonale
- projection orthogonale
- meilleure approximation d'un vecteur
- distance d'un vecteur à un sous-espace
- algorithme de Gram-Schmidt
- orthonormalisation d'une base
- méthode des moindres carrées
- décomposition QR d'une matrice

---

## Noyau d'exercices

### 1.1 Matrices orthogonales

#### Exercice 1 (Matrices orthogonales I)

##### Rappel de la théorie

Soit  $U \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice. Montrer que

- (a)  $U$  est orthogonale si et seulement si  $U$  est inversible et  $U^{-1} = U^T$  ;
- (b)  $U$  est orthogonale si et seulement si  $(U\mathbf{v}) \cdot (U\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  pour tous  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  ;
- (c)  $U$  est orthogonale si et seulement si  $\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  ;

(d) si  $U$  est orthogonale, alors  $(U\mathbf{v}) \cdot (U\mathbf{w}) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  pour tous  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Projection orthogonale

### Exercice 2 (Calcul de la projection orthogonale)

Rappel de la théorie

(a) Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dans  $\mathbb{R}^3$ .

- (i) Vérifier que  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont orthogonaux.
- (ii) Calculer la projection orthogonale  $\text{proj}_W(\mathbf{v})$  de  $\mathbf{v}$  sur  $W = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .
- (iii) Donner la décomposition  $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \text{proj}_W(\mathbf{v})$ , où  $\mathbf{z} \in W^\perp$ .

(b) Même question pour

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans  $\mathbb{R}^4$ .

(c) Même question pour

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Algorithme de Gram-Schmidt

### Exercice 3 (Calcul de base orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ )

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  suivantes.

(a)  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  base d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , avec

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$  base d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , avec

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Donner une base orthonormée pour les items précédents.

**Exercice 4 (Calcul de base orthonormée dans  $\mathbb{P}$ )**

On considère le produit scalaire  $(\cdot | \cdot) : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{P}$  donné par

$$(p|q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

pour tous  $p, q \in \mathbb{P}$ . Soit  $W = \text{Vect}\{1, t, t^2\}$ . Calculer une base orthonormée de  $W$ .

**1.4 Meilleure approximation**

**Exercice 5 (Meilleure approximation)**

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouver la meilleure approximation de  $\mathbf{v}$  par un vecteur dans  $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ .
- (b) Calculer la distance entre  $\mathbf{v}$  et  $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ .
- (c) Trouver la meilleure approximation de  $\mathbf{v}'$  par un vecteur de la forme  $\text{Vect}\{\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2\}$ .
- (d) Calculer la distance entre  $\mathbf{v}'$  et  $\text{Vect}\{\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2\}$ .

**1.5 Décomposition QR**

**Exercice 6 (Décomposition QR)**

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le moyen -  
niveau (a), (i) et  
(ii); et (b), (i).

**Exercice 7 (Moindres carrés et décomposition QR)**Déterminer la solution  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  au sens des moindres carrés

(a) en utilisant l'équation normale lorsque

(i)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

(ii)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

(iii)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ;

(b) en utilisant la méthode QR lorsque

(i)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

(ii)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

 **Pour compléter la pratique****2.1 Matrices orthogonales****Exercice 8 (Matrices orthogonales II)**

Montrer que

(a)  $U \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  est orthogonale si et seulement si  $U^T$  est orthogonale ;(b) si  $U, V \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  sont orthogonales, alors  $UV$  est orthogonale ;

(c) si

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est unitaire (i.e.  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ), alors la matrice

$$R_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 - 2v_1v_1 & -2v_1v_2 & \dots & -2v_1v_n \\ -2v_2v_1 & 1 - 2v_2v_2 & \dots & -2v_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2v_nv_1 & -2v_nv_2 & \dots & 1 - 2v_nv_n \end{pmatrix}$$

est orthogonale ;

- (d) si  $\lambda$  est une valeur propre réelle d'une matrice orthogonale  $U$ , alors  $\lambda \in \{-1, 1\}$  ;
- (e) étant donné une partie  $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , la matrice  $[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n] \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  est orthogonale si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une famille orthonormée.

## 2.2 Projection orthogonale

Exercice difficile

### Exercice 9 (Projection orthogonale I)



Rappel de la théorie

On continue avec les hypothèses précédentes. Montrer que l'application  $\text{proj}_W : V \rightarrow W$  qui associe  $\text{proj}_W(v)$  à  $v \in V$  est linéaire. En déduire que

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

## 2.3 Algorithme de Gram-Schmidt

### Exercice 10 (V/F sur orthogonalité)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  | V                        | F                        |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Toute famille non-vidée orthonormée de $\mathbb{R}^n$ est liée.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ . Si $\mathbf{v}$ est dans $W$ et dans $W^\perp$ , alors $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Si $U$ est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une famille orthonormée, alors $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Si $W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ , de dimension $p$ avec $0 < p \leq n$ , alors la méthode de Gram-Schmidt produit une base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ avec $\ \mathbf{v}_i\  = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ à partir d'une famille quelconque $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ de $W$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## 2.4 Meilleure approximation

### Exercice 11 (V/F sur la meilleure approximation)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  | V                        | F                        |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Une base d'un sous-espace vectoriel $W$ de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux deux à deux est appelée une base orthonormée.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Un ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Une base orthonormée est une base orthogonale mais la réciproque est fautive en général.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Si $\mathbf{v}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel $W$ , alors $\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})$ n'est pas nul.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## 2.5 Projection orthogonale et décomposition QR

### Exercice 12 (V/F sur projection orthogonale et décomposition QR)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  | V                        | F                        |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Soit $A$ une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$ . Alors, $Q^T A = R$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $\hat{\mathbf{y}}$ la projection orthogonale de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sur $W$ . Alors $\hat{\mathbf{y}}$ dépend du choix de la base de $W$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tel que $W = \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . Si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_2$ , alors $\mathbf{z} \in W^\perp$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ . Si $\mathbf{y} \in W$ , alors sa projection orthogonale sur $W$ est $\text{proj}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |